BULETINUL Universităţii Petrol – Gaze din Ploieşti	Vol. LIX No. 2/2007	23 - 30	Seria Matematică - Informatică - Fizică

Sur les Fonctions Faiblement Préouvertes dans les Espaces Bitopologiques Flous (I)

Mihai Brescan

Universitatea Petrol-Gaze din Ploieşti, Bd. Bucureşti 39, Ploieşti, Catedra de Matematică
e-mail: mate@upg-ploiesti.ro

Résumé

Le but du notre travail est de généraliser pour les espaces bitopologiques flous le concept de fonction faiblement préouverte introduit dans la topologie générale par Takashi Noiri et Valeriu Popa..On donnent quelques théorémes de caractérisation, qui représentent des équivalences très importantes. À la fin du travail sont énoncés quelques implications importantes et puis les notions et les équivalences qui seront étudiées dans le travail suivant (II).

Mots-clef: *espace topologique flou, espace bitopologique flou, ensemble préouvert, fonction préouverte, fonction faiblement préouverte*

Introduction

Soient X un ensemble arbitraire nonvide et l'intervalle $\mathcal{J} = [0,1] \subset \mathbf{R}$. Un ensemble flou en X est une application $\lambda : X \to [0,1]$. On va noter par $\mathcal{F}\,(X)$ la classe des ensembles flous dans X. L'ensemble X, nommé l'espace X, sera identifié à la fonction constante **1** et l'ensemble vide ϕ à la fonction constante o. Soit I un ensemble indexé et soit $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ une famille d'ensembles flous en X. La réunion et l'intersection de cette famille, notées par $\bigcup\limits_{i\in I}\lambda_i$, respectivement $\bigcap\limits_{i\subset I}\lambda_i$, on les définissent dans le mode suivant:

$$\left(\bigcup_{i\in I}\lambda_i\right)(x)=\sup_{i\in I}\{\lambda_i(x)\},(\forall)x\in X \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i\in I}\lambda_i\right)(x)=\inf_{i\in I}\{\lambda_i(x)\},(\forall)x\in X\ .$$

Pour le cas fini on va noter par $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$, respectivement $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$ et on définit par *max* respectivement *min*:

L'inclusion notée par $\lambda_1 \subseteq \lambda_2$ ou $\lambda_1 \le \lambda_2$, on la définit par $\lambda_1(x)\le\lambda_2(x)$ et l'égalité, notée par $\lambda_1 = \lambda_2$, on la définit par $\lambda_1(x)=\lambda_2(x)$, $(\forall)x\in X$. Evidemment $\lambda_1 = \lambda_2$ si et seulement si $\lambda_1 \le \lambda_2$ et $\lambda_2 \le \lambda_1$. La complémentaire de $\lambda \in\ \mathcal{F}\,(X)$, notée par λ^c , on la définit par

$$\lambda^C = \mathbf{1}\text{-}\lambda, \lambda^C(x) = (\mathbf{1} - \lambda)(x) = \mathbf{1} - \lambda(x), (\forall)x \in X .$$

Soient X et Y deux ensembles arbitraires nonvides, une application

$$f : X \to Y \text{ et } \lambda \in \mathcal{F}(X),\ \mu \in \mathcal{F}(Y).$$

L'image de λ et l'ensemble flou $f(\lambda) \in \mathcal{F}(Y)$ donné par :

$$f(\lambda)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \lambda(x), \text{ si } f^{-1}(y) \neq \phi, (\forall) y \in Y, \text{ou } f^{-1} = \{x) f(x) = y\} \\ 0 \quad \text{, au cas contraire} \end{cases}.$$

L'image inverse ou réciproque de μ et l'ensemble flou $f^{-1}(\mu) \in \mathcal{F}(X)$ donné par $f^{-1}(\mu)(x) = \mu(f(x)), (\forall) x \in X$, c'est-à-dire $f^{-1}(\mu) = \mu o f$, au sens de la composition ordinaire des fonctions ([5], [8]). Les propriétés de f et f^{-1} sont données dans le travail [8].

Un point flou x_α en X est un ensemble flou en X qui posséde la valeur α dans le point $x \in X (0 < \alpha \le 1)$ et 0 dans tous les autres points de l'espace X ; on dit que x_α a le support x (noté $\sup p x_\alpha = x$) et la valeur α ([7]).

On peut écrire : $x_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha & si \quad y = x \\ 0 & si \quad y \neq x \end{cases},\ y \in X.$

Un ensemble flou est la réunion de tous ses points flous. On dit que le point flou x_α appartient à l'ensemble flou $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ si $\alpha \le \lambda(x), (\forall) x \in X$ et nous noterons par $x_\alpha \in \lambda$.

A lieu la relation $x_\alpha \in \bigcup\limits_{i \in I} \lambda_i$ s'il existe $i_o \in I$ tel que $x_\alpha \in \lambda_{i_o}$.

Si x_α est un point flou en X et $f : X \to Y$, alors $f(x_\alpha)$ est un point flou en Y. Si $\sup p x_\alpha = x$ alors $\sup p(f(x_\alpha)) = f(x)$.

Si y_β est un point flou en Y, alors $f^{-1}(y_\beta)$ est un point flou en X si $y_\beta \in f(X)$ et f est une injection. Dans ce cas, si $\sup p y_\beta = y$ alors $\sup p\left(f^{-1}(y_\beta)\right) = f^{-1}(y)$([8]).

Une topologie floue sur X (au sens CHANG) est une famille $\tau \subseteq \mathcal{F}(X)$ qui satisfait aux conditions suivantes :

$$(T_1)\ \mathbf{0}, \mathbf{1} \in \tau ;$$

$$(T_2) \text{ si } \delta_i \in \tau, i = \overline{1,n} \text{ alors } \bigcap_{i=1}^{n} \delta_i \in \tau;\ (T_3) \text{ si } \delta_i \in \tau,\ i \in I \text{ alors } \bigcup_{i \in I} \delta_i \in \tau .$$

Le couple (X, τ) est par la définition un espace topologique flou (au sens CHANG) ou, en abrégé e.t.f. On appelle ensemble flou τ-ouvert chaque élément de τ et on appelle ensemble flou τ-fermé la complémentaire d'ensemble τ - ouvert ([5]).

On définit l'intérieur et la fermeture de $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ respectivement par ([5]) :

$$Int\, \lambda = \overset{o}{\lambda} = \cup\{\delta | \delta \le \lambda, \delta \in \tau\} = \sup\{\delta \le \lambda, \delta \in \tau\} \text{ et}$$

$$C\ell\lambda = \overline{\lambda} = \cap\{\sigma \mid \sigma \geq \lambda, \sigma^{c} \in \tau\} = \inf\{\sigma \mid \sigma \geq \lambda, \sigma^{c} \in \tau\}$$

L'ensemble flou $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ on dit :

(1) F-régulier fermé (resp. F- régulier ouvert) si $\overset{\overline{o}}{\lambda} = \lambda \left(resp. \overset{o}{\overline{\lambda}} = \lambda \right)$([1]).

(2) F $_{\beta}$ - ouvert (resp. F demi-ouvert, F demi-fermé, F préouvert, F $_{\alpha}$ -ouvert) si $\lambda \leq \overset{\overline{o}}{\overline{\lambda}}$ (resp. $\lambda \leq \overset{\overline{o}}{\lambda}$, $\overset{o}{\overline{\lambda}} \geq \lambda$, $\lambda \leq \overset{o}{\overline{\lambda}}$, $\lambda \leq \overset{o}{\overline{\overset{o}{\lambda}}}$) si $\lambda \leq \overset{\overline{o}}{\overline{\lambda}}$).

On dit F $_{\beta}$ -fermé (resp. F demi- fermé , F demi-ouvert, F préfermé, F α - fermé) la complémentaire de chacun de ces ensembles.

L'intersection de tous les ensembles F demi- fermés (resp. F préfermés, F α - fermés, F β - fermés) qui contient l'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ on l'appelle la F demi-fermeture (resp. la F préfermeture, la F α - fermeture, la F β -fermeture) de λ et on va noter F d- $\overline{\lambda}$ ou Fd-C $\ell\lambda$ (resp.Fp - $\overline{\lambda}$ ou Fp-C $\ell\lambda$, ou F α - $\overline{\lambda}$ ou F α -C $\ell\lambda$, F $\beta - \overline{\lambda}$ ou F $\beta - C\ell\lambda$).

La réunion de tous les ensembles F demi - ouverts (resp. F préouverts, F $_{\alpha}$ -ouverts, F $_{\beta}$ - ouverts) qui sont inclus dans l'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ on l'appelle le F demi – intérieur (resp. le F préintérieur, le F α - intérieur, le F β - intérieur) de λ et l'on note par Fd - $\overset{o}{\lambda}$ ou Fd - Int λ (resp. Fp - λ ou Fp - Int λ, F $\alpha - \overset{o}{\lambda}$ ou F α - Int λ, F β - $\overset{o}{\lambda}$ ou F β - Int λ).

Les ensembles $\lambda, \mu \in \mathcal{F}(X)$ sont quasi-coïncidents (q – coïncidents) s'il y a $x \in X$ tel que $\lambda(x) + \mu(x) > 1$ et on va noter par $\lambda\, q\, \mu$.

Au cas contraire on va noter par $\lambda \overline{q} \mu$. Si λ et μ sont q – coïncidents en *x*, alors $\lambda(x) \neq 0, \mu(x) \neq 0$ et donc $(\lambda \cap \mu)(x) \neq 0$ ([7]).

Espaces Bitopologiques Flous et les Fonctions Faiblement Préouvertes

Dans le travail [2] nous avons introduit la notion d'espace bitopologique flou par la

Définition 1. Un espace *X* sur lequel se définissent deux topologies floues (au sens CHANG) arbitraires τ_1 et τ_2 on appelle espace bitopologique flou et on va noter par (X, τ_1, τ_2).

Si $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ alors on va noter par F i C ℓ λ ou F i $\overline{\lambda}$ la fermeture de λ par rapport à τ_i et F i Int λ ou F i $\overset{o}{\lambda}$ l'interieur de λ par rapport à τ_i, où $i = 1,2$. En partant de [6] nous introduiront ici la suivante

Définition 2. Un ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ dans l'espace bitopologique flou (X, τ_1, τ_2) est nommé:

(1) F-(*i,j*) - régulier ouvert si $\lambda \leq FiInt(Fj\overline{\lambda})$, où $i, j = 1,2,\ i \neq j$;

(2) F-(i,j) - demi-ouvert si $\lambda \le FjC\ell(FiInt\lambda)$, où $i, j = 1,2,\ i \ne j$;
(3) F-(i,j) - préouvert si $\lambda \le Fi\left(\overline{Fj\lambda}\right)$, où $i, j = 1,2,\ i \ne j$;
(4) F-(i,j) - α -ouvert si $\lambda \le FiInt(FjC\ell(Int\lambda))$.

En utilisant la complémentaire on définit respectivement un ensemble F-(i,j) – régulier fermé, F-(i,j)-demi- fermé, F-(i,j)-préfermé et F-(i,j)- α - fermé.

Définition 3. L'intersection de tous les ensembles F-(i,j)-préfermés contenant $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ on appelle F-(i,j)-préfermeture de λ et on va noter par F-(i,j)-p$\overline{\lambda}$ ou F-(i,j)-pC$\ell\lambda$.

La réunion de tous les ensembles F-(i,j)-préouverts qui sont inclus dans l'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ on appelle F-(i,j)-préintérieur de λ et on va noter par F-(i,j)-p$\overset{o}{\lambda}$ ou F-(i,j)-pIntλ.

Lemme 1. Soient (X, τ_1, τ_2) un espace bitopologique flou et la famille $\{\lambda_K\}_{K \in I} \subset \mathcal{F}(X)$:

(1) Si λ_k est F-(i,j)-préouvert pour chaque $k \in I$, alors $\bigcup\limits_{k \in I} \lambda_k$ est F-(i,j)-préouvert;
(2) Si λ_k est F-(i,j)- préfermé pour chaque $k \in I$, alors $\bigcup\limits_{k \in I} \lambda_k$ est F-(i,j)- préfermé.

La démonstration c'est facile.

Lemme 2. Soient (X, τ_1, τ_2) un espace bitopologique flou et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$:

(1) F-(i,j) - p Int λ est F-(i,j)-préouvert;
(2) F-(i,j) - p C$\ell\lambda$ est F-(i,j)- préfermé;
(3) L'ensemble λ est F-(i,j)-préouvert si et seulement si $\lambda = F(i,j) - p\,Int\lambda$;
(4) L'ensemble λ est F-(i,j)- préfermé si et seulement si $\lambda = F(i,j) - p\,C\ell\lambda$.

Démonstration: (1) et (2) résultent immédiatement du Lemme 1, et (3) et (4) résultent de (1) et (2).

Lemme 3. Soient l'espace bitopologique flou (X, τ_1, τ_2) et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$:

(1) **1**- F-(i,j) - p Int λ = F(i,j) - p Cℓ (**1**- λ);
(2) **1**- F-(i,j) - p Cℓ λ = F-(i,j) - p Int (**1**- λ).

Démonstration: (1) Après le Lemme 2, F-(i,j)- pCℓ λ est F-(i,j)- préfermé, donc **1**- F-(i,j)- p Cℓ λ est F-(i,j)-préouvert. Puis, **1**- F(i,j) - pCℓ (**1**- λ) $\le \lambda$ est donc **1**- F-(i,j) - pCℓ (**1**- λ) $\le$ F-(i,j) - p Int λ.

Réciproquement, soit le point flou $x_\alpha \in$ F-(i,j) - p Int λ; il y a un ensemble F-(i,j)-préouvert δ tel que $x_\alpha \in \delta \le \lambda$. Il résulte que **1**- δ est F-(i,j)- préfermé et **1**-$\lambda \le$ **1**- δ. Parce que $x_\alpha \notin$ **1**- δ, il résulte que $x_\alpha \notin$ F(i,j) - p Cℓ (**1**- λ) et donc

F-(i,j) - p Int $\lambda \le$ **1**- F(i,j) - p Cℓ (**1**- λ).

D'ici il suit que **1**- F(i,j) - p Int λ = F(i,j) - p Cℓ (**1**- λ).

Le point (2) suit immédiatement de (1).

Définition 4. Soient l'espace bitopologique flou (X, τ_1, τ_2) et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Une point flou x_α en X on dit un point de F-(i,j)- θ -fermeture du λ et on va noter par F-(i,j)- Cℓ_θ λ l'ensemble de ces points si $\lambda q FjC\ell\delta$ pour chaque ensemble τ_i – ouvert δ avec $x_\alpha \in \delta$, où $i, j = 1,2,\ i \ne j$.

Définition 5. L'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ est nommé F-(i, j)-θ-fermé si $\lambda =$ F-(i, j)- $C\ell\ \lambda$ et F-(i, j)-θ- ouvert si $\mathbf{1}$- $\lambda = \lambda^c$ est F-(i, j)-θ-fermé.

Définition 6. La réunion de tous les ensembles F-(i, j)-θ- ouverts qui sont inclus dans λ on appelle F-(i, j)- θ-intérieur de λ et on va noter par F-(i, j)- $\mathrm{Int}_\theta \lambda$.

Remarque 1. On a bien $x_\alpha \in$ F(i, j)-$\mathrm{Int}_\theta \lambda$ si et seulement s'il y a l'ensemble τ_i-ouvert δ avec $x_\alpha \in \delta$ tel que

$$x_\alpha \in \delta \leq FjC\ell\delta \leq \lambda .$$

Lemme 4. Soient l'espace bitopologique flou (X, τ_1, τ_2) et $\lambda \in \mathcal{F}(X)$. Alors :

(1) $\mathbf{1}$- F(i, j)- $\mathrm{Int}_\theta\ \lambda =$ F(i, j)-$C\ell_\theta(\mathbf{1}$- $\lambda)$;
(2) $\mathbf{1}$- F(i, j)- $C\ell_\theta\ \lambda =$ F(i, j)- $\mathrm{Int}_\theta(\mathbf{1}$- $\lambda)$.

Lemme 5. Soit l'espace bitopologique flou (X, τ_1, τ_2)

Si δ est τ_j-ouvert en X, alors F(i, j)-$C\ell_\theta\ \lambda =$ Fi $C\ell\ \delta$, $i, j = 1,2$, $i \neq j$.

Définition 7. Soient les espaces bitopologiques flous (X, τ_1, τ_2), (Y, t_1, t_2) et la fonction $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (Y, t_1, t_2)$. La fonction f on dit:

(1) F(i,j)-demi-ouverte si pour chaque ensemble τ_i-ouvert δ en X, $f(\delta)$ est F(i, j)-demi-ouverte en Y;
(2) F(i, j)-préouverte si pour chaque ensemble τ_i-ouvert δ en X, $f(\delta)$ est F(i, j)-préouvert en Y;
(3) faiblement F(i, j)-ouverte si pour chaque ensemble τ_i-ouvert δ en X, $f(\delta) \leq \mathrm{F}i\mathrm{Int}(f(FjC\ell\delta))$.

Définition 8. La fonction $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (Y, t_1, t_2)$ on dit faiblement F(i, j)-préouvert si pour chaque ensemble τ_i-ouvert δ en X, $f(\delta) \leq$ F(i, j)-p Int (f(Fj $C\ell\delta$)).

Définition 9. La fonction $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (Y, t_1, t_2)$ est nommé réciproquement faiblement ouverte respectivement réciproquement faiblement préouverte) si f est faiblement F(1,2)-ouverte et faiblement F(2,1)-ouverte (resp. faiblement F(1,2)- préouverte et faiblement F(2,1)-préouverte).

En suite, nous donnerons quelques théorèmes de caractérisation pour les fonctions faiblement préouvertes.

Théorème 1. Soit la fonction $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (Y, t_1, t_2)$.

Les suivantes affirmations sont équivalentes:

(1) f est faiblement F (i, j)- préouverte;
(2) F (i, j)-f($\mathrm{Int}_\theta\ \lambda) \leq F(i, j) - p\,Int(f(\lambda))$, $(\forall)\lambda \in \mathcal{F}(X)$;
(3) F (i, j)-$\mathrm{Int}_\theta\left(f^{-1}(\mu)\right) \leq F(i, j) - f^{-1}(p\,Int\mu)$, $(\forall)\mu \in \mathcal{F}(\mathrm{Y})$;
(4) F(i, j)- f^{-1} $(pC\ell\mu)$ $\leq$ F(i, j)- $C\ell_\theta\left(f^{-1}(\mu)\right)$, $(\forall)\mu \in \mathcal{F}(\mathrm{Y})$;
(5) Pour chaque point flou x_α en X et pour chaque ensemble τ_i-ouvert δ en X avec $x_\alpha \in \delta$ il y a un ensemble ν F(i, j)-préouvert avec $f(x_\alpha) \in \nu$ tel que $\nu \leq f(FjC\ell\delta)$;

Démonstration: (1)$\Rightarrow$(2): Soient $\lambda \in \mathcal{F}(X)$ et le point flou $x_\alpha \in$ F (i, j)-Int$_\theta\,\lambda$; donc il y a un ensemble τ_i-ouvert δ en X tel que $x_\alpha \in$ F j C $\ell\delta \le \lambda$. Donc on a bien

$$f(x_\alpha) \in f(\delta) \le f(FjC\ell\delta) \le f(\lambda)$$

et parce que f est faiblement F(i, j)- préouvert, il en résulte que

$$f(\delta) \le F(i,j) - pInt(fFjC\ell\delta) \le F(i,j) - pInt(f(\lambda),$$

donc $x_\alpha \in f^{-1}(F(i,j) - pInt(f(\lambda))$ et d'ici F(i,j)-Int$_\theta(\alpha) \le f^{-1}(F(i,j) - pInt(f(\lambda))$, d'où

$$\text{F}(i,j)\text{-f}(\text{Int}_\theta\,\lambda) \le F(i,j) - pInt(f(\lambda)).$$

(2)$\Rightarrow$(3): Soit $\mu \in \mathcal{F}(\mathrm{Y})$ et alors après (2) on a bien

$$\text{F}(i,j)\text{-}\, f\left(Int_\theta\left(f^{-1}(\mu)\right)\right) \le F(i,j) - pInt(f(f^{-1}(\mu))) \le F(i,j) - pInt\mu,$$

donc F(i,j)-Int$_\theta\left(f^{-1}(\mu)\right) \le F(i,j) - f^{-1}(pInt\mu)$.

(3)$\Rightarrow$(4) Soit $\mu \in \mathcal{F}(\mathrm{Y})$ et alors

$$\mathbf{1}_X - F(i,j) - C\ell_\theta(f^{-1}(\mu)) \le F(i,j) - Int_\theta\ (\mathbf{1}_{xX} - f^{-1}(\mu)) =$$

$$\text{F}(i,j)\text{-Int}_\theta(f^{-1}(\mathbf{1}_Y - \mu)) \le \text{F}(i,j)\text{-}\, f^{-1}(p\text{Int}(\mathbf{1}_Y - \mu)) = f^{-1}(\mathbf{1}_Y - \text{F}(i,j)\text{-pC}\,\ell\mu) =$$

$$= \mathbf{1}_X - f^{-1}(\text{F}(i,j)\text{-}p\text{C}\,\ell\mu).$$

Il suit que F(i,j) - $f^{-1}(p\mathrm{C}\,\ell\mu) \le$ F(i,j)-C$\,\ell_\theta(f^{-1}(\mu))$.

(4)$\Rightarrow$(5). Soient un point flou x_α en X, un ensemble τ_i-ouvert δ avec $x_\alpha \in \delta$ l'ensemble $\mu = \mathbf{1}_Y - f(FjC\ell\mu)$.

Après (4) on a bien successivement :

$$\text{F}(i,j)\text{-}\, f^{-1}(p\text{C}\,\ell\,(\mathbf{1}_Y - f(Fj(C\ell\delta)) \le F(i,j) - C\ell_\theta(\mathbf{1}_Y - f(Fj(C\ell\delta)),$$

aprés $f^{-1}(F(i,j) - pC\ell(\mathbf{1}_Y - f\ (\mathrm{F}\,j\ \mathrm{C}\ \ell\delta)) = \mathbf{1}_X - (F(i,j) - pInt(f(FjC\ell\delta))$,

et puis Lemme 5,

$$F(i,j) - C\ell_\theta(f^{-1}(\mathbf{1}_Y - f(Fj(C\ell\delta)) = F(i,j) - C\ell_\theta(\ _Y - f(Fj(\mathbf{1}_X - f^{-1}(f(FjC\ell\delta)) =$$

$$= F(i,j) - C\ell_\theta(\mathbf{1}_X - FjC\ell\delta) = FiC\ell(\mathbf{1}_X - FjC\ell\delta) = \mathbf{1}_X - FiInt(FjC\ell\delta) \le \mathbf{1}_X - FiInt\delta = \mathbf{1}_X - \delta = \delta^c.$$

Par conséquence, on obtient que :

$$\delta \le F(ij) - f^{-1}(pInt(f(FjC\ell\delta)) \text{ et donc } f(\delta) \le F(ij) - pInt(f(FjC\ell\delta)).$$

Comme $f(x_\alpha) \in f(\delta)$, il y a l'ensemble $F(ij)-$préouvert ν tel que $f(x_\alpha) \in \nu \le f(FjC\ell\delta)$.

(5)$\Rightarrow$(1): Soient l'ensemble τ_i-ouvert δ en X et le point flou $x_\alpha \in \delta$.

Après (5) il y a un ensemble F$(i\,j)$ préouvert ν avec $f(x_\alpha) \in \nu$ tel que $\nu \le f(FjC\ell\delta)$, donc on a bien $f(x_\alpha) \in \nu \le F(ij) - pInt(f(FjC\ell\delta))$ pour chaque point $x_\alpha \in \delta$.

Par conséquence, on obtient $f(\delta) \le F(ij) - pInt(f(FjC\ell\delta))$, ce qui montre que *f* est faiblement F(*ij*)- préouvert.

Théorème 2. Soit la fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \to (Y,t_1,t_2)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

(1) *f* est faiblement F(*i j*)- préouverte ;
(2) $f(FiInt\sigma) \le F(ij) - pInt(f(\sigma)), (\forall)\sigma \in \mathcal{F}(X)$, τ_j-fermé en X ;
(3) $f(\delta) \le F(ij) - pInt(f(FjC\ell\delta))$ $(\forall)\delta \in \mathcal{F}(X)$, $F(ij)-$ préouvert en *X*;
(4) $f(\delta) \le F(ij) - pInt(f(FjC\ell\delta))$ $(\forall)\delta \in \mathcal{F}(X)$, $F(ij)-\alpha$ -ouvert en *X*.

Démonstration: $(1) \Rightarrow (2)$: Soient *f* faiblement $F(ij)-$ préouverte et σ un ensemble τ_j-fermé en X ; alors F*i*Int σ est τ_i- ouvert et après (1) on a bien

$$f(FiInt\sigma) \le F(ij) - pInt(f(FjC\ell\sigma) = F(i,j) - pInt(f(\sigma)).$$

$(2) \Rightarrow (3)$: Soit δ un ensemble $F(ij)-$ préouvert en *X*. Après (2) on obtient

$$f(\delta) \le Fj(FiInt(FjC\ell\delta) \le F(i,j) - pInt(f(FjC\ell\delta)).$$

$(3) \Rightarrow (4)$: C'est évidemment parce que chaque ensemble $F(i,j)-\alpha-$ouvert est $F(ij)-$ préouvert.

$(4) \Rightarrow (1)$: Si δ est τ_i- ouvert en *X*, alors δ est $F(i,j)-\alpha-$ouvert en *X* et alors

$f(\delta) \le F(i,j) - pInt(f(FjC\ell\delta))$ et donc f est faiblement $F(i,j)-$ préouvert.

Théorème 3. Soit la fonction $f:(X,\tau_1,\tau_2) \to (Y,t_1,t_2)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

(1) *f* est faiblement $F(i,j)-$ préouvert;
(2) $F(i,j) - pC\ell(f(FjInt\sigma)) \le f(\sigma)$, $(\forall)\sigma \in \mathcal{F}(X)$, τ_i- fermé en X ;
(3) $F(i,j) - pC\ell(f(\delta)) \le f(FiC\ell\delta), (\forall)\delta \in \mathcal{F}(X)$, τ_j- ouvert en *X*.

Démonstration: $(1) \Rightarrow (2)$: Si σ est τ_i- fermé en *X*, $\mathbf{1}_X - \sigma$ est τ_i- ouvert en X et alors

$$\mathbf{1}_Y - f(\sigma) = f(\mathbf{1}_X - \sigma) \le F(i,j) - pInt(f(Fj(\mathbf{1}_X - \sigma))) =$$
$$= F(i,j) - pInt(f(\mathbf{1}_X - FjInt\sigma)) = F(i,j) - pInt(\mathbf{1}_Y - f(FjInt\sigma)) =$$
$$= \mathbf{1}_Y - F(i,j) - pC\ell(f(FjInt\sigma),$$

d'où il en résulte que

$$F(i,j) - pC\ell(f(FjInt\sigma)) \le f(\sigma).$$

$(2) \Rightarrow (3)$: Si δ est τ_j- ouvert en *X*, alors après (2) on a bien successivement :

$$F(i,j) - C\ell(f(\delta)) = F(i,j) - pC\ell(f(FjInt\delta)) \le F(i,j) - pC\ell(f(FjInt(FiC\ell\delta))) \le$$
$$\le f(FiC\ell\delta),$$

d'où il en résulte que $F(i,j) - pC\ell(f(\delta)) \le f(FiC\ell\delta)$.

$(3) \Rightarrow (1)$: Si δ est τ_j- ouvert en *X*, on a bien successivement :

$$\mathbf{1}_Y - F(i,j) - pInt(f(FjC\ell\delta)) = F(i,j) - pC\ell(\mathbf{1}_Y - f(FjC\ell\delta)) = F(i,j) - pC\ell$$

$$(f(\mathbf{1}_X - FjC\ell\delta)) \leq f(FiC\ell(\mathbf{1}_X - FjC\ell\delta)) = f(\mathbf{1}_X - FiInt(FjC\ell\delta)) \leq f(\mathbf{1}_X - FiInt\delta) =$$
$$= \mathrm{f}(\mathbf{1}_X - \delta) = \mathbf{1}_Y - f(\delta).$$

D'ici, il suit que $f(\delta) \leq F(i,j) - pInt(f(FjC\ell\delta))$ et donc f est faiblement $F(i,j)$- préouverte.

Remarque 2. On peut définir la notion de fonction presque $F(i,j)$- préouvert, à l'aide de la notion de l'ensemble $F(i,j)$- régulier ouvert et on peut montrer l'implication:

f $F(i,j)$- préouverte $\Rightarrow f$ presque $F(i,j)$- préouvert $\Rightarrow f$ faiblement $F(i,j)$- préouverte.

Aussi même, on peut introduire les notions d'espace bitopologique flou $F(i,j)$- presque régulier et $F(i,j)$- régulier et on peut montrer que si l'espace de définition de la fonction f est $F(i,j)$- presque régulier, alors les concepts de presque $F(i,j)$- préouvert et faible $F(i,j)$- préouverte sont équivalentes et si l'espace de définition pour fonction f est $F(i,j)$- régulier, toutes ces trois notions d'ouverture pour f sont équivalentes.

Nous étudierons ces problèmes dans le travail suivant.

Bibliographie

1. Azad, K.K - On Fuzzy Semicontinuity, Fuzzy Almost Continuity and Fuzzy weakly Continuity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 82, pp. 14-32, 1981
2. Brescan, M. - Espaces bitopologiques flous, *Lucrările Conferinţei Naţionale de Geometrie şi Topologie*, Suceava 6-9 oct. 1988, Facultatea de Matematică, Universitatea Al. I. Cuza, Iaşi, pp. 223-229, 1989
3. Brescan, M. - Sur quelques types d'ensembles flous dans les espaces bitopologiques flous, *Studii şi cercetări ştiinţifice. Seria: Matematică*, Nr.3, pp. 55-59, Universitatea Bacău, 1993
4. Brescan, M. - Continuité dans les espaces bitopologiques flous, *Studii şi cercetări ştiinţifice. Seria: Matematică*, Nr.4 , pp. 13-16, Universitatea Bacău, 1994
5. Chang, C.L. - Fuzzy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 4.3, pp.734-742, 1973
6. Noiri, T., Popa, V. - On weakly Preopen Functiones in Bitopological Spaces, *Journal Pure Mathematics,* Vol.21, pp. 101-110, 2004
7. Pao-Ming, P., Ying-Ming, L. - Fuzzy Topology I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 76, pp. 571-599, 1980
8. Yalvac, T.H. - Fuzzy Sets and Functions on Fuzzy Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 126, pp. 409-423, 1987

Asupra Funcţiilor Slab Predeschise în Spaţii Bitopologice Fuzzy (I)

Rezumat

Scopul lucrării de faţă este de a generaliza pentru spaţii bitopologice fuzzy conceptul de funcţie predeschisă introdus în topologia generală de Takashi Noiri şi Valeriu Popa. Se dau câteva teoreme de caracterizare, care reprezintă echivalenţe foarte importante. În final se enunţă câteva implicaţii importante şi apoi noţiunile şi echivalenţele care vor fi studiate în lucrarea următoare (II).