BULETINUL Universităţii Petrol – Gaze din Ploieşti	Vol. LXI No. 1/2009	19 - 24	Seria Matematică - Informatică - Fizică

Sur les Multifonctions Floues δ-continues

Mihai Brescan

Universitatea Petrol-Gaze din Ploieşti, Bd. Bucureşti 39, Ploieşti, Catedra de Matematică

Résumé

Le but de notre travail est de généraliser pour une multifonction floue la notion de δ-continuité, étudiée dans la topologie générale par Y. Kűçűc, T. Noiri et V. Popa. Le travail contient quelques théorèmes de caractérisation pour cette classe de multifonctions.

Mots clef: *espace topologique flou, ensemble flou régulièrement ouverts, semi-ouverts, préouverts, multifonction floue, multifonction floue δ-continue*

Préliminaires

Soient un ensemble arbitraire non vide Y (l'espace Y) et l'intervalle $[0,1] \subset \boldsymbol{R}$. Un ensemble flou en Y est une fonction $\lambda : Y \to [0,1]$. Nous noterons par $\mathcal{F}(Y)$ la classe des ensembles flous de l'espace Y. L'ensemble Y sera identifié à la fonction constante **1** et l'ensemble vide Φ à la fonction constante **0**. Soient un ensemble indexé *I* et $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ une famille d'ensembles flous en Y. La réunion et l'intersection de cette famille, notées par $\bigcup_{i\in I}\lambda_i$, respectivement $\bigcap_{i\in I}\lambda_i$, sont définies dans le mode suivant:

$$\left(\bigcup_{i\in I}\lambda_i\right)(y) = \sup\{\lambda_i(y) : i \in I\},\ (\forall)y \in Y \text{ et } \left(\bigcap_{i\in I}\lambda_i\right)(y) = \inf\{\lambda_i(y) : i \in I\},\ (\forall)y \in Y.$$

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}(Y)$, l'inclusion notée par $\lambda_1 \le \lambda_2$ ou $\lambda_1 \subseteq \lambda_2$ est définie par $\lambda_1(y) \le \lambda_2(y)\ (\forall)y \in X$. La complémentaire de $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ est définie par λ^c=**1**-λ, $\lambda^c(y)$= (**1**-λ)(y)= 1-$\lambda(y)$, $(\forall)\, y \in Y$.

On dit que la famille $t \subseteq \mathcal{F}(Y)$ est une topologie floue sur ***Y*** si *t* satisfait les conditions suivantes:

1. $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in t$;
2. si $\delta_i \in t, i = \overline{1,n}$ alors $\bigcap_{i=1}^{n}\delta_i \in t$, où $\bigcap_{i=1}^{n}\delta_i = \min\{\delta_i(y) : i = \overline{1,n}\}, (\forall)y \in Y$;
3. si $\delta_i \in t, i \in I$ alors $\bigcup_{i\in I}\delta_i \in t$.

Le couple (Y,t) est par définition, un espace topologique flou (au sens CHANG) ([4]). Chaque élément de *t* s'appelle un ensemble flou *t*-ouvert et la complémentaire d'un ensemble flou *t*-

ouvert s'appelle un ensemble flou t-fermé ([4]). L'intérieur et la fermeture de $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ sont définis respectivement par (voir [4]):

$$Int\lambda = \overset{\circ}{\lambda} = \bigcup\{\delta | \delta \leq \lambda, \delta \in t\}, \quad Cl\lambda = \overline{\lambda} = \bigcap\{\sigma | \sigma \geq \lambda, \sigma^c \in t\}.$$

Un point flou y_α en $\boldsymbol{Y}$ est un ensemble flou qui a la valeur α $(0 < \alpha \leq 1)$ dans le point $y \in Y$ et la valeur 0 dans tous les autres points de l'espace $\boldsymbol{Y}$. On dit que $y = \mathrm{supp} y_\alpha$ est le support de y_α ([10]).

On dit que les ensembles λ et $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ sont quasi-coïncidents (ou q-coïncidents) et on va noter par $\lambda q \mu$, s'il existe $y \in Y$ tel que $\lambda(y) + \mu(y) > 1$ ([10]). Au cas contraire, λ et μ sont non q- coïncidents, donc $\lambda(y) \leq 1 - \mu(y)$ pour $y \in Y$ et on va noter par $\lambda \overline{q} \mu$ ([10]). Nous avons $\lambda \leq \mu$ si et seulement si λ et $\mathbf{1} - \mu$ sont non q-coïncidents et on va noter par $\lambda \overline{q} (\mathbf{1} - \mu)$ ([10]).

On dit que le point flou y_α et l'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ sont q-coïncidents si $\alpha + \lambda(y) > 1$ pour $y \in Y$. Un ensemble $\beta \in \mathcal{F}(Y)$ s'appelle un Q-voisinage pour le point flou y_α en $\boldsymbol{Y}$ s'il existe l'ensemble t-ouvert γ (donc $\gamma \in t$) tel que $y_\alpha q \gamma \leq \beta$. La famille de tous Q-voisinages pour y_α s'appelle le système de Q-voisinages pour y_α ([10]). On dit que l'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ est un ensemble régulier ouvert (resp. régulier fermé) si $\overset{\circ}{\overline{\lambda}} = \lambda$ (resp. $\overline{\overset{\circ}{\lambda}} = \lambda$) ([1]).

Nous introduisons ici les définitions suivantes:

Définition 1. On dit que le point flou y_α est un point δ-adhérent pour l'ensemble $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ si $\lambda \cap \mu \neq \mathbf{0}$ pour tout ensemble λ régulier ouvert avec $y_\alpha q \lambda$. L'ensemble de tous les points δ-adhérents pour μ, s'appelle δ-fermeture (ou δ-adhérence) de μ et on va noter par $\delta Cl \mu$ (ou $\delta \overline{\mu}$). Si $\delta Cl \mu = \mu$, alors μ s'appelle un ensemble δ-fermé. La complémentaire d'un ensemble δ-fermé s'appelle δ-ouvert.

Définition 2. L'ensemble noté $\delta Int \mu$ où $\delta Int \mu = \{y_\alpha : y_\alpha q \lambda \leq \mu, y_\alpha \text{ point flou en } \boldsymbol{Y}\}$ pour un ensemble régulier ouvert donné $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ s'appelle δ-intérieur de μ.

Remarque 1. On a bien la relation $\mathbf{1} - \delta Int \mu = \delta Cl(\mathbf{1} - \mu)$.

Pour un ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ sont connues les notions suivantes: On dit que l'ensemble λ est demi-ouvert (resp. préouvert, demi- préouvert) si $\lambda \leq \overline{\overset{\circ}{\lambda}}$ (resp. $\lambda \leq \overset{\circ}{\overline{\lambda}}$, $\lambda \leq \overline{\overset{\circ}{\overline{\lambda}}}$) ([2]).

L'intersection de tous les ensembles demi-fermés contenant $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ s'appelle demi-fermeture de μ et on va noter par $S Cl \mu$ ou $S \overline{\mu}$.

Lemme 1. (NOIRI [7]). Soit $\mu \in \mathcal{F}(Y)$. Alors μ est préouvert si et seulement si $s Cl \mu = Int(\overline{\mu})$.

La démonstration est facile, en étant similaire à celle du cas classique.

Multifonctions Floues δ-continues

Dans ce travail nous utiliserons la notion de multifonction floue introduit par N. S. PAPAGEORGIU ([8]):

Définition 3. Soient (X,τ) un espace topologique classique et (Y,t) un espace topologique flou, au sens CHANG (en abrégé e. t. f.). L'application $F : X \to \mathcal{F}(Y)$, c'est-à-dire $(\forall)x \in X$, $F(x) \in \mathcal{F}(Y)$, s'appelle une multifonction floue.

Définition 4. Pour une multifonction floue $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ on définit l'inverse supérieur $F^{+}(\lambda)$, respectivement l'inverse inférieur $F^{-}(\lambda)$ d'un ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$, dans le mode suivant: $F^{+}(\lambda) = \{x \in X : F(x) \leq \lambda\}$, $F^{-}(\lambda) = \{x \in X : F(x) q\, \lambda\}$ ([6], [8]).

Évidemment $F^{+}(\lambda), F^{-}(\lambda) \subset X$.

Thèoreme 1 ([6]). Pour une multifonction floue $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ on a bien la relation

$$F^{-}(\mathbf{1} - \mu) = X - F^{+}(\mu), (\forall)\mu \in \mathcal{F}(Y).$$

Nous introduirons ici les définitions suivantes:

Définition 5. On dit que la multifonction floue $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ est supérieure δ-continue (en abrégé s. δ. c.) dans le point $x \in X$ si pour tout ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$, $\lambda \in t$ tel que $F(x) \leq \lambda$ il existe $U \subset X$ avec $x \in U$ tel que $F\left(\overset{\circ}{\overline{U}}\right) \leq \overset{\circ}{\overline{\lambda}}$.

Définition 6. On dit que la multifonction floue $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ est inférieure δ-continue (en abrégé i. δ. c.) dans le point $x \in X$ si pour tout ensemble $\lambda \in t$ tel que $F(x) q\, \lambda$, il existe $U \subset X$ tel que $\overset{\circ}{\overline{U}} \subset F^{-}\left(\overset{\circ}{\overline{\lambda}}\right)$.

Définition 7. On dit que la multifonction floue $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ est δ-continue si F est inférieur et supérieur δ-continue dans tous les points de l'espace X.

Le lemme suivant est important pour les démonstrations aux théorèmes de caractérisation.

Lemme 2 ([5]). Pour une multifonction floue $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ les affirmations suivantes sont équivalentes:

1) F est s. δ. c. (resp. i. δ. c.) ;
2) pour tout ensemble $\lambda \in t$ avec $F(x) \leq \lambda$ (resp. $F(x) q\, \lambda$) il existe un ensemble $U \subset X$, régulier ouvert avec $x \in U$ tel que $F(U) \leq s\,Cl\,\lambda$ (resp. $F(u) q\, s\,Cl\,\lambda, (\forall)u \in U$;
3) $F^{+}(\lambda)$ est δ-ouvert (resp. $F^{-}(\lambda)$ est δ-ouvert) en X pour tout ensemble $\lambda \in F(Y)$ régulier ouvert ;
4) $F^{-}(\mu)$ (resp. $F^{+}(\mu)$) est δ-fermé en X pour tout ensemble $\mu \in F(Y)$ régulier fermé.

Nous donnerons ici quelques théorèmes de caractérisation pour les multifonctions floues.

Théorème 2. Pour la multifonction floue $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ les affirmations suivantes sont équivalentes:

1) F est s. δ. c.;
2) $\delta\, Cl\left(F^{-}(\lambda)\right) \subseteq F^{-}(Cl\,\lambda)$ pour tout ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ demi-préouvert ;
3) $\delta\, Cl\left(F^{-}(\lambda)\right) \subseteq F^{-}(Cl\,\lambda)$ pour tout ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ semi-ouvert.

Démonstration

$(1) \Rightarrow (2)$ Soit $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ un ensemble demi-préouvert. Parce que $Cl\,\lambda$ est régulier fermé, conf. au Lemme 2, $\delta\, Cl\left(F^{-}(\lambda)\right)$ est δ-fermé en X et $F^{-}(\lambda) \subseteq F^{-}(Cl\,\lambda)$ et donc $\delta\, Cl\left(F^{-}(\lambda)\right) \subseteq F^{-}(Cl\,\lambda)$.

$(2) \Rightarrow (3)$ C'est évidemment, parce que tout ensemble semi-ouvert en Y est demi-préouvert en Y.

$(3) \Rightarrow (1)$ Soit $\mu \in \mathcal{F}(Y)$ un ensemble régulier-fermé, donc μ est demi-ouvert en Y (voir [2], on a bien $\delta\, Cl\left(F^{-}(\mu)\right) \subseteq F^{-}(Cl\,\mu) = F^{-}(\mu)$ et donc $F^{-}(\mu)$ est δ-fermé en X. Après le Lemme 2 il en résulte que F est s. δ. c.

Théorème 3. Pour une multifonction floue $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ les affirmations suivantes sont équivalentes:

1) F est i. δ. c.;
2) $\delta\, Cl\left(F^{+}(\lambda)\right) \subseteq F^{+}(Cl\,\lambda)$ pour tout ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ demi-préouvert ;
3) $\delta\, Cl\left(F^{+}(\lambda)\right) \subseteq F^{+}(Cl\,\lambda)$ pour tout ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ semi-ouvert.

La démonstration est similaire à celle du théorème précédent. Comme une généralisation de la notion classique de δ-continuité (NOIRI, [7]) nous introduirons ici la suivante

Définition 8. On dit que la fonction $f : (X,\tau) \to (Y,t)$ est δ-continue si pour tout point $x \in X$ et pour tout Q-voisinage β de $f(x)$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f\left(\overset{\circ}{\overline{U}}\right) \leq \overset{\circ}{\overline{\beta}}$.

Remarque 2. Nous considérons ici la fonction f comme une multifonction floue à une valeur unique. Alors pour la fonction f a lieu le corollaire suivant:

Corollaire 1. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

1) f est δ-continue ;
2) $\delta\, Cl\left(f^{-1}(\lambda)\right) \subseteq f^{-1}(Cl\,\lambda)$ pour tout ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ demi-préouvert ;
3) $\delta\, Cl\left(f^{-1}(\lambda)\right) \subseteq f^{-1}(Cl\,\lambda)$ pour tout ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ préouvert ;
4) $f^{-1}(\lambda) \subseteq \delta\, Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl\,\lambda)\right)\right)$ pour tout ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$ préouvert.

Remarque 3. La notation $f^{-1}(\lambda)$ représente l'image inverse (au sens CHANG) d'ensemble λ donné par $f^{-1} \circ \lambda = \lambda \circ f$, au sens de la composition ordinaire de fonctions ([4]).

Comme une généralisation de la définition classique introduite par VALERIU POPA ([9]) nous introduirons ici:

Définition 9. Pour la multifonction floue $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ on définit la multifonction floue

$$S\,Cl\,F : X \to \mathcal{F}(Y),\ \text{où}\ (S\,Cl\,F)(x) = S\,Cl\left(F(x)\right)\ (\forall) x \in X\,.$$

A l'aide de la multifonction $SCl\,F$ on démontre les théorèmes suivants de caractérisation pour la multifonction *F*.

Théorème 4. La multifonction $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ est s. *δ*. c. si et seulement si la multifonction $S\,Cl\,F : X \to \mathcal{F}(Y)$ est s. *δ*. c.

Démonstration. Nécessité. Nous présupposons que *F* est s. *δ*. c. Soient $x \in X$ et l'ensemble $\lambda \in \mathcal{F}(Y)$, $\lambda \in t$ avec $(S\,Cl\,F)(x) \leq \lambda$. Comme $F(x) \leq \lambda$ et en utilisant le Lemme 2, il existe l'ensemble $U \subset X$ régulier ouvert avec $x \in U$ tel que $F(U) \leq S\,Cl\,\lambda$. On a bien $F(u) \leq S\,Cl\,\lambda$, $(\forall) u \in U$ et donc $S\,Cl\,F(u) \leq SCl\,\lambda$ et d'ici $(SCl\,F)(U) \leq S\,Cl\,\lambda$ et donc $S\,Cl\,F$ est s. *δ*. c.

Suffisance. Nous présupposons que $SCl\,F$ est s. *δ*. c. et soient $x \in X$ et $\lambda \in t$ avec $F(x) \leq \lambda$. Alors $(S\,Cl\,F)(x) \leq S\,Cl\,\lambda$ et après le Lemme 2 il existe *U* régulier ouvert en *X* avec $x \in U$ tel que $(SCl\,F)(U) \leq S\,Cl(SCl\,\lambda) = SCl\,\lambda$ (voir [9]). Puis $F(U) \leq S\,Cl\,\lambda$ et après le Lemme 2, *F* est s. *δ*. c.

Théorème 5. La multifonction floue $F : X \to \mathcal{F}(Y)$ est i. *δ*. c. si et seulement si la multifonction floue $S\,Cl\,F : X \to \mathcal{F}(Y)$ est i. *δ*. c.

Démonstration. Nécessité. Soient *F* i. *δ*. c., $x \in X$ et $\lambda \in t$ avec $(S\,Cl\,F)(x) q\,\lambda$. Alors $\lambda\,q\,F(x)$ et après le Lemme 2, il existe l'ensemble *U* régulier ouvert en *X* avec $x \in U$ tel que $F(u) q\,S\,Cl\,\lambda$, $(\forall) u \in U$. D'ici il en résulte que $(S\,Cl\,F)(u) q\,S\,Cl\,\lambda$, $(\forall) u \in U$ et donc $S\,Cl\,F$ est i. *δ*. c.

Suffisance. Soient $S\,Cl\,F$ i. *δ*. c., $x \in X$ et $\lambda \in t$ avec $F(x) q\,\lambda$. Parce que $F(x) \leq S\,Cl\,F(x)$, $S\,Cl\,F(x) q\,\lambda$ et après le Lemme 2, il existe un ensemble *U* régulier ouvert en *X* avec $x \in U$, tel que $(S\,Cl\,F)(u) q\,S\,Cl\,\lambda, (\forall) u \in U$. Après le Lemme 1, $S\,Cl\,\lambda = Int(Cl\,\lambda)$ et $F(u) q\,S\,Cl\,\lambda$, $(\forall) u \in U$ et donc *F* est i. *δ*. c. (après le Lemme 2).

Bibliographie

1. Azad, K.K. - On Fuzzy Semicontinuity, Fuzzy Almost Continuity and Fuzyy Weakley Continuity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 82, pp. 14- 32, 1981
2. Brescan, M. - Espaces topologiques flou demi-T2, *Studii şi cercetări ştiinţifice, Seria: Matematică*, 6, pp. 55-72, 1996, Universitatea din Bacău
3. Brescan, M. - Sur quelques formes faibles de continuité pour les multifonction floues, *Studii şi cercetări ştiinţifice, Seria: Matematică*, 12, pp. 13-30, 2002, Universitatea din Bacău
4. Chang, C.L. - Fuzyy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 43, pp. 734- 742, 1973
5. Küçüc, Y. - On some Caracterisations of δ-coutinous Multifunctions, *Demonstratio Mathematica*, 28, pp. 587-595, 1995
6. Mukherjee, M.N., Malakar, S. - On Almost Continuous and Weakly Continuous Fuzzy Multifunctions, *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, 5, 1, pp. 59-63, March 2005
7. Noiri, T. - On δ-continous Functions, *Korean Journal Math. Soc.*, 16, pp. 161-166, 1980
8. Papageorgiu, N.S. - Fuzzy Topology and Fuzzy Multifonctions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 126, pp. 409- 423, 1987
9. Popa, V. - Some Properties of δ-continous Multifunctions, *Studii şi cercetări ştiinţifice, Seria: Matematică*, 6, p. 163-169, 1996, Universitatea din Bacău

10. P a o, M.P., Y i n g, M.L. - Fuzzy Topology I, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 76, pp. 571-599, 1980

Asupra multifuncțiilor fuzzy δ-continue

Rezumat

În această lucrare se generalizează pentru o multifuncție fuzzy conceptul de δ-continuitate studiat în topologia generală de Y. KÜÇÜC, T. NOIRI şi V. POPA. Rezultatele importante ale lucrării sunt teoremele de caracterizare date pentru această clasă de multifuncții.